ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΓΕΝΙΚΗΣ 2012

ΘΕΜΑ Α.

Α1. Σελ. 31 σχολικό

Α2. Σελ. 148 σχολικό

Α3. Σελ. 96 σχολικό

Α4.

α) Λάθος

β) Σωστό

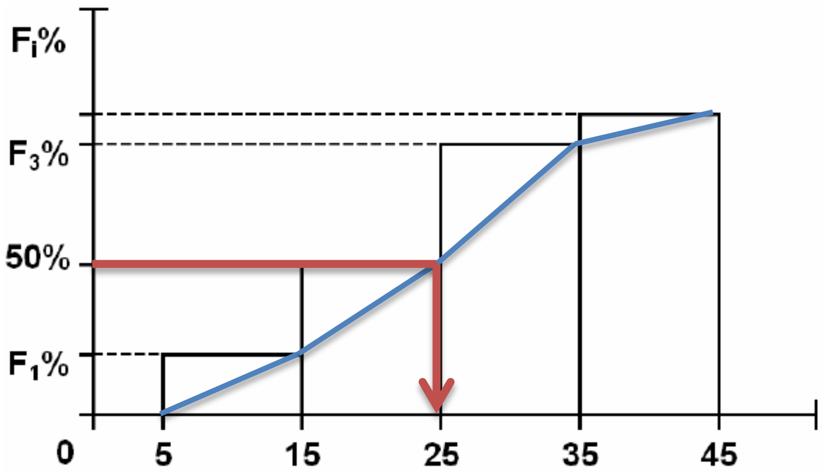
γ) Λάθος

δ) Σωστό

ε) Σωστό

ΘΕΜΑ Β.

Β1. Αφού η οριζόντια ευθεία που διέρχεται από το 50% τέμνει το πολύγωνο αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων στο σημείο με τετμημένη 25, άρα η διάμεσος του δείγματος είναι δ=25.



Β2. Αφού δ=25, οι μισές παρατηρήσεις του δείγματος θα έχουν τιμή μικρότερη του 25 και οι υπόλοιπες τιμή μεγαλύτερη του 25, επομένως:

$$v_1 + v_2 = v_3 + v_4 \Leftrightarrow \alpha + 4 + 3\alpha - 6 = 2\alpha + 8 + \alpha - 2 \Leftrightarrow \alpha = 8$$

Ο αντιστοίχως πίνακας συχνοτήτων της κατανομής που προκύπτει για α=8 είναι ο :

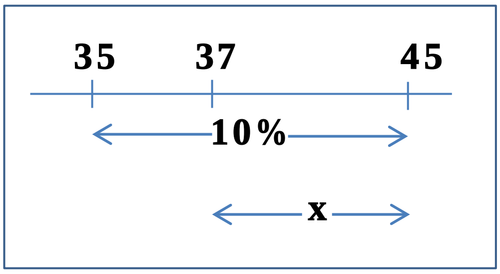
Χρόνοι (λεπτά)	x_i	v_i	$f_i\%$	N_i	$F_i\%$	$x_i \cdot v_i$	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(x_i - \bar{x})^2 \cdot v_i$
[5,15)	10	12	20	12	20	120	14	196	2352
[15,25)	20	18	30	30	50	360	4	16	288
[25,35)	30	24	40	54	90	720	6	36	864
[35,45)	40	6	10	60	100	240	16	256	1536
Σύνολο		60	100			1440			5040

B3. Η μέση τιμή του δείγματος είναι

$$\bar{x} = \frac{\sum_{1}^{4} x_i \cdot v_i}{v} = \frac{1440}{60} = 24$$

Και η διασπορά $s^2 = \frac{1}{v}\sum_{i=1}^{4}(x_i - \bar{x})^2 \cdot v_i = \frac{5040}{60} = 84$, επομένως η τυπική απόκλιση θα είναι $s = \sqrt{s^2} = \sqrt{84} \simeq 9{,}17$.

B4. Αφού στο διάστημα 35 έως 45 ανήκει το 10% των παρατηρήσεων τότε στο διάστημα 37 έως 45 ανήκει το



$$\frac{45-37}{45-35} = \frac{x}{10} \Leftrightarrow \frac{8}{10} = \frac{x}{10} \Leftrightarrow x = 8\%$$

Άρα το 8% των μαθητών χρειάστηκαν τουλάχιστον 37 λεπτά να λύσουν το μαθηματικό πρόβλημα.

ΘΕΜΑ Γ.

Γ1. Έστω Α= ¨Ο μαθητής μαθαίνει γαλλικά¨ με $P(A) = \frac{3v}{v^2+1}$ και

B=¨Ο μαθητής μαθαίνει ισπανικά¨ με $P(B) = \frac{v+2}{v^2+1}$

Το ενδεχόμενο να γνωρίζουν και τις δύο γλώσσες είναι το $A \cap B$ με $P(A \cap B) = \frac{v+1}{v^2+1}$

Τότε το ενδεχόμενο να γνωρίζουν μία τουλάχιστον από τις δύο γλώσσες είναι το $A\cup B$ με:

$$P(A\cup B)=\lim_{x\to -1}\frac{2\left(\sqrt{x^2+3}-2\right)}{x^2+x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to -1}\frac{2\left(\sqrt{x^2+3}-2\right)\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}{x(x+1)\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}=\lim_{x\to -1}\frac{2\left(x^2-1\right)}{x(x+1)\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to -1}\frac{2(x-1)(x+1)}{x(x+1)\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}=\lim_{x\to -1}\frac{2(x-1)}{x\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}=\frac{-4}{-4}=1$$

Άρα $P(A\cup B)=1\Leftrightarrow A\cup B=\Omega$ αφού ο δειγματικός χώρος αποτελείται από απλά ισοπίθανα ενδεχόμενα.

Γ2. Από προσθετικό νόμο πιθανοτήτων ισχύει ότι:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\Leftrightarrow 1=\frac{3\nu}{\nu^2+1}+\frac{\nu+2}{\nu^2+1}-\frac{\nu+1}{\nu^2+1}\Leftrightarrow \nu^2+1=3\nu+\nu+2-\nu-1$$

$\Leftrightarrow \nu^2-3\nu=0\Leftrightarrow \nu(\nu-3)=0\Leftrightarrow \nu=0$ απορρίπτεται αφού $\nu\geq 3$ ή $\nu=3$

Άρα ν=3 επομένως $P(A)=\frac{9}{10}$, $P(B)=\frac{5}{10}$ και $P(A\cap B)=\frac{4}{10}$

Γ3. Το ενδεχόμενο να μαθαίνει μόνο μία από τις δύο γλώσσες είναι το $(A-B)\cup(B-A)$ και τα ενδεχόμενα $(A-B)$ και $(B-A)$ είναι ασυμβίβαστα οπότε :

$$P\big((A-B)\cup(B-A)\big)=P(A-B)+P(B-A)=P(A)-P(A\cap B)+P(B)-P(B\cap A)=$$

$$=\frac{9}{10}-\frac{4}{10}+\frac{5}{10}-\frac{4}{10}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$$

Γ4. Από τον κλασικό ορισμό πιθανότητας ισχύει ότι :

$$P(A\cap B)=\frac{N(A\cap B)}{N(\Omega)}\Leftrightarrow \frac{4}{10}=\frac{32}{N(\Omega)}\Leftrightarrow N(\Omega)=80\,.$$

ΘΕΜΑ Δ.

Δ1. $f(x)=\frac{1+\ln^2 x}{x}$ τότε

$$f'(x)=\left(\frac{1+\ln^2 x}{x}\right)'=\frac{\left(1+\ln^2 x\right)'x-\left(1+\ln^2 x\right)x'}{x^2}=\frac{2\ln x\cdot\frac{1}{x}\cdot x-\left(1+\ln^2 x\right)}{x^2}=\frac{2\ln x-1-\ln^2 x}{x^2}=$$

$$=-\frac{\ln^2 x-2\ln x+1}{x^2}=-\frac{(\ln x-1)^2}{x^2}\leq 0$$

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow -\frac{(\ln x-1)^2}{x^2}=0 \Leftrightarrow (\ln x-1)^2=0 \Leftrightarrow \ln x-1=0 \Leftrightarrow \ln x=1 \Leftrightarrow x=e$$

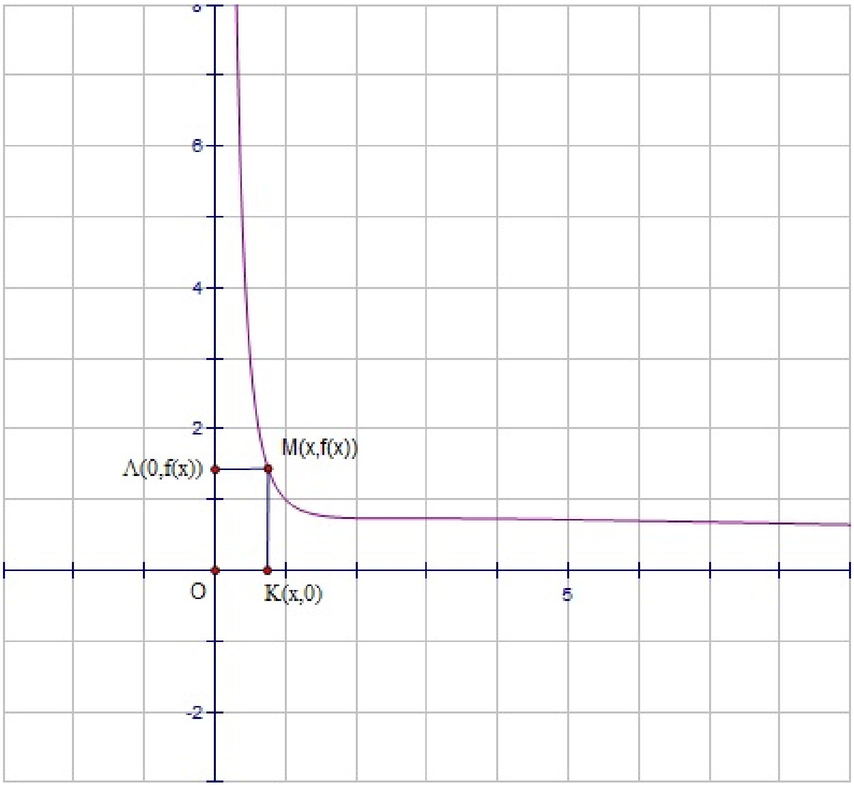
x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	-	
$f(x)$		$\searrow$		$\searrow$	

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα για x>0.

Δ2. Το εμβαδόν του Ορθογωνίου ΟΚΜΛ είναι ίσο με:

$$(\text{ΟΚΜΛ})=(\text{ΟΚ})\cdot(\text{ΚΜ})\overset{f(x)>0}{=}$$

$$=x\cdot f(x)=x\cdot\frac{1+\ln^2 x}{x}=1+\ln^2 x$$



Αν $E(x)=1+\ln^2 x$ τότε

$$E'(x)=\left(1+\ln^2 x\right)'=2\ln x\cdot\frac{1}{x}=\frac{2\ln x}{x}$$

$$E'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{2\ln x}{x}=0 \Leftrightarrow 2\ln x=0$$

$$\Leftrightarrow x=1$$

$$E'(x)>0 \Leftrightarrow \frac{2\ln x}{x}>0 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} 2\ln x>0$$

$$\Leftrightarrow x>1$$

x	0		1		$+\infty$
$E'(x)$		-	0	+	
$E(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	
			$O.E.$		

Το εμβαδόν γίνεται ελάχιστο όταν

x=1 και $f(1)=\frac{1+\ln^2 1}{1}=1$ δηλαδή όταν

το ΟΚΜΛ είναι τετράγωνο.

Δ3. Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $\Sigma(1, f_{(1)})$ έχει κλίση $f'(1) = -\frac{(\ln 1 - 1)^2}{1^2} = -1$ άρα η ε:y=λx+β αφού είναι παράλληλη στην εφαπτομένη της f στο 1 θα έχει ίδια κλίση με την εφαπτομένη, οπότε $\lambda = f'(1) \Leftrightarrow \lambda = -1$.

Επομένως ε:y=-x+β.

Τα σημεία (x_i, y_i) ανήκουν στην ε άρα θα την επαληθεύουν, δηλαδή

$$y_i = -x_i + \beta \text{, με i=1,2,...,10.}$$

Τότε $\bar{y} = -\bar{x} + \beta \Leftrightarrow \bar{y} = -10 + \beta$ και $s_y = |-1| s_x \Leftrightarrow s_y = 2$, επομένως ο συντελεστής μεταβολής των τεταγμένων θα είναι $CV_y = \frac{s_y}{|\bar{y}|} \Leftrightarrow CV_y = \frac{2}{|\beta - 10|}$.

Για να είναι το δείγμα των δέκα τεταγμένων ομοιογενές θα πρέπει:

$$CV_y \leq 10\% \Leftrightarrow \frac{2}{|\beta - 10|} \leq 0{,}10 \Leftrightarrow 2 \leq 0{,}10 \cdot |\beta - 10| \Leftrightarrow |\beta - 10| \geq 20 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \beta - 10 \leq -20 \text{ ή } \beta - 10 \geq 20 \Leftrightarrow \beta \leq -10 \text{ ή } \beta \geq 30$$

Δ4. Αφού $\mathrm{A} \subseteq \mathrm{A} \cup \mathrm{B} \Rightarrow P(\mathrm{A}) \leq P(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) \overset{f \searrow}{\Rightarrow} f\left(P(\mathrm{A})\right) \geq f\left(P(\mathrm{A} \cup \mathrm{B})\right)$ (i)

Και $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} \subseteq \mathrm{A} \cup \mathrm{B} \Rightarrow P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) \leq P(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) \overset{f \searrow}{\Rightarrow} f\left(P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})\right) \geq f\left(P(\mathrm{A} \cup \mathrm{B})\right)$ (ii)

Τότε από $(i) + (ii) \Rightarrow f\left(P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})\right) + f\left(P(\mathrm{A})\right) \geq 2 f\left(P(\mathrm{A} \cup \mathrm{B})\right)$

Επιμέλεια απαντήσεων

Παναγιώτης Κ. Μάρκος

Μαθηματικός