ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ 2011

Θέμα Α.

Α1. ΣΧΟΛΙΚΟ ΣΕΛ 152
Α2. ΣΧΟΛΙΚΟ ΣΕΛ 142
Α3. ΣΧΟΛΙΚΟ ΣΕΛ 65
Α4. α) Λ
β) Λ
γ) Σ
δ) Λ
ε) Σ

Θέμα Β.

Β1.

Ισχύει $P(M)=\frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{N(M)}{N(\Omega)}=\frac{1}{4} \Leftrightarrow N(\Omega)=4N(M)$ οπότε

$64 < N(\Omega) < 72 \Leftrightarrow 64 < 4N(\mathrm{M}) < 72 \Leftrightarrow 16 < N(\mathrm{M}) < 18$ αλλά $N(M) \in IN$ άρα $N(M)=17$ οπότε $N(\Omega)=N(\Omega)=4N(M)=68$.

Β2.

$$P(M)+P(A)+P(K)=1 \Leftrightarrow \frac{1}{4}+4\lambda^2-5\lambda+7=1 \Leftrightarrow 4\lambda^2-5\lambda+1=0$$

$\Delta=9>0$ άρα $\lambda=1$ ή $\lambda=\frac{1}{4}$

- αν $\lambda=1$ τότε $P(A)=4$ απορρίπτεται.
- αν $\lambda=\frac{1}{4}$ τότε $\boxed{P(A)=\frac{1}{4}}$ και $\boxed{P(K)=\frac{1}{2}}$

Β3. Από **Β1** το $N(M)=17$

$$P(A)=\frac{N(A)}{N(\Omega)} \Leftrightarrow \frac{1}{4}=\frac{N(A)}{68} \Leftrightarrow N(A)=17$$

$$P(\mathrm{K})=\frac{N(\mathrm{K})}{N(\Omega)} \Leftrightarrow \frac{1}{2}=\frac{N(\mathrm{K})}{68} \Leftrightarrow N(\mathrm{K})=34$$

Β4.

Τα ενδεχόμενα Α και Μ είναι ασυμβίβαστα, άρα από τον απλό προσθετικό νόμο ισχύει :

$$P(A \cup M)=P(A)+P(M)=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$

Θέμα Γ.

Οι τεταγμένες των σημείων Δ και Ε εκφράζουν τις αντίστοιχες σχετικές συχνότητες της $3^{ης}$ και $4^{ης}$ κλάσης. Αφού το ευθύγραμμο τμήμα ΔΕ είναι παράλληλο προς τον οριζόντιο άξονα άρα $y_\Delta=y_\mathrm{E} \Leftrightarrow f_3\%=f_4\%$

Γ1.

α τρόπος

Ισχύει ότι

$$\sum_{i=1}^{5} f_i\% = 100 \Leftrightarrow f_1\% + f_2\% + f_3\% + f_4\% + f_5\% = 100$$

$$\Leftrightarrow f_3\% + f_4\% = 60 \overset{f_3\%=f_4\%}{\Leftrightarrow} 2f_3\% = 60 \Leftrightarrow f_3\% = 30$$

Άρα $\boxed{f_3\% = f_4\% = 30}$

β τρόπος

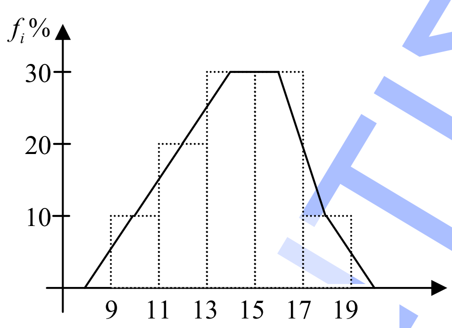
Αφού $\overline{x} = 14200$€ δηλαδή $\overline{x} = 14,2$ χιλιάδες ευρώ άρα :

$$\overline{x} = \sum_{i=1}^{5} x_i f_i \Leftrightarrow 14,2 = 10 \cdot 0,10 + 12 \cdot 0,20 + 14 \cdot f_3 + 16 \cdot f_4 + 18 \cdot 0,10 \Leftrightarrow 14 \cdot f_3 + 16 \cdot f_4 = 9$$

$$\overset{f_3=f_4}{\Leftrightarrow} 30 \cdot f_3 = 9 \Leftrightarrow f_3 = \frac{9}{30} \Leftrightarrow f_3 = 0,30$$

Άρα $\boxed{f_3 = f_4 = 0,30}$

Γ2.



Γ3.

i	[α,β)	x_i	$f_i\%$
1	[9,11)	10	10
2	[11,13)	12	20
3	[13,15)	14	30
4	[15,17)	16	30
5	[17,19)	18	10
	Σύνολο		100

Γ4.

Τουλάχιστον ετήσιες πωλήσεις 15000€ έχει κάνει το $f_4\% + f_5\% = 40\%$ των πωλητών.

Γ5.

Το εμβαδόν του χωρίου που ορίζει το πολύγωνο συχνοτήτων και ο οριζόντιος άξονας είναι ίσο με το μεγεθος του δείγματος, επομένως ν=80. Το 40% των 80 πωλητών είναι $\frac{40}{100} \cdot 80 = 32$ πωλητές.

Θέμα Δ.

Δ1.

$f_{(x)} = e^{\frac{1}{3}x\left(x^2 - \frac{11}{10}x + \frac{2}{5}\right)} = e^{\frac{x^3}{3} - \frac{11}{30}x^2 + \frac{2}{15}x}$ οπότε

$$f'_{(x)} = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{11}{30}x^2 + \frac{2}{15}x\right)' \cdot e^{\frac{x^3}{3} - \frac{11}{30}x^2 + \frac{2}{15}x} = \left(x^2 - \frac{11}{15}x + \frac{2}{15}\right) \cdot e^{\frac{x^3}{3} - \frac{11}{30}x^2 + \frac{2}{15}x}$$

τότε $\quad f'_{(x)}=0 \Leftrightarrow \left(x^2-\frac{11}{15}x+\frac{2}{15}\right)\cdot e^{\frac{x^3}{3}-\frac{11}{30}x^2+\frac{2}{15}x}=0 \Leftrightarrow x^2-\frac{11}{15}x+\frac{2}{15}=0 \Leftrightarrow 15x^2-11x+2=0$

$\Delta=1>0,$ άρα $x_{1,2}=\frac{11\pm1}{30} \Leftrightarrow x_1=\frac{2}{5}$ ή $x_2=\frac{1}{3}$

Η f είναι γνησίως αύξουσα στα $\left(-\infty,\frac{1}{3}\right]$ και $\left[\frac{2}{5},+\infty\right)$

και γνησίως φθίνουσα στο $\left[\frac{1}{3},\frac{2}{5}\right]$.

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		$\frac{2}{5}$		$+\infty$
$f'_{(x)}$		+		-		+	
$f_{(x)}$		↗		↘		↗	

Δ2.

Αφού $A\subseteq B$ άρα $P(A)\le P(B)$ επομένως $P(B)=\frac{2}{5}$ και $P(A)=\frac{1}{3}$ τότε

- $A\cap B=A$ άρα $P(A\cap B)=P(A)=\frac{1}{3}$
- $A-B=\varnothing$ άρα $P(A-B)=P(\varnothing)=0$
- $A\cup B=B$ άρα $P(A\cup B)=P(B)=\frac{2}{5}$
- και $P(B-A)=P(B)-P(A\cap B)=\frac{2}{5}-\frac{1}{3}=\frac{1}{15}$

Δ3.

α)

$$f_{(x)}=g_{(x)} \Leftrightarrow e^{\frac{1}{3}x\left(x^2-\frac{11}{10}x+\frac{2}{5}\right)}=e^{\frac{1}{5}x\left(\frac{3x^2}{2}-x-\frac{1}{3}\right)} \Leftrightarrow \frac{1}{3}x\left(x^2-\frac{11}{10}x+\frac{2}{5}\right)=\frac{1}{5}x\left(\frac{3x^2}{2}-x-\frac{1}{3}\right) \Leftrightarrow$$

$$x\left[\frac{1}{3}\left(x^2-\frac{11}{10}x+\frac{2}{5}\right)-\frac{1}{5}\left(\frac{3x^2}{2}-x-\frac{1}{3}\right)\right]=0 \Leftrightarrow x\left(-\frac{1}{30}x^2+\frac{5}{30}x-\frac{3}{15}\right)=0 \Leftrightarrow$$

$\boxed{x=0}$ ή $-\frac{1}{30}x^2+\frac{5}{30}x-\frac{3}{15}=0 \Leftrightarrow$

$x^2-5x+6=0$

$(x-2)(x-3)=0$

$\boxed{x=2}$ ή $\boxed{x=3}$

β) αν $x_1=0,\ x_2=2,\ x_3=3$ τότε

- $v_1=2x_1+1=1$
- $v_2=2x_2+1=5$
- $v_3=2x_3+1=7$

οπότε $\bar{x}=\frac{x_1v_1+x_2v_2+x_3v_3}{v_1+v_2+v_3}=\frac{0+10+21}{13}=\frac{31}{13}$

επιμέλεια απαντήσεων
Παναγιώτης Κ. Μάρκος
Μαθηματικός