ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ 2010

ΘΕΜΑ Α.

Α4.

α) Σ
β) Σ
γ) Λ
δ) Λ
ε) Σ

ΘΕΜΑ Β.
Β1.

$$z+\frac{2}{z}=2 \Leftrightarrow z^2+2=2z \Leftrightarrow z^2-2z+2=0$$

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=4-8=-4<0 \text{ άρα}$$

$$\mathrm{z}_1=\frac{2+i\sqrt{4}}{2}=1+i \text{ και } \mathrm{z}_2=\frac{2-i\sqrt{4}}{2}=1-i$$

Β2.
(α τρόπος)

$$z_1^{2010}+z_2^{2010}=(1+i)^{2010}+(1-i)^{2010}=\left[(1+i)^2\right]^{1005}+\left[(1-i)^2\right]^{1005}=$$

$$=\left(1+2i+i^2\right)^{1005}+\left(1-2i+i^2\right)^{1005}=(2i)^{1005}+(-2i)^{1005}=(2i)^{1005}-(2i)^{1005}=0$$

(β τρόπος)

$$z_1^{2010}+z_2^{2010}=(1+i)^{2010}+(1-i)^{2010}=(1+i)^{2010}+\left(-i^2-i\right)^{2010}=(1+i)^{2010}+\left[-i(i+1)\right]^{2010}=$$

$$=(1+i)^{2010}+(-i)^{2010}(1+i)^{2010}=(1+i)^{2010}+(-i)^{4\cdot 502+2}(1+i)^{2010}=(1+i)^{2010}-(1+i)^{2010}=0$$

Β3.

$$|w-4+3i|=|z_1-z_2| \Leftrightarrow |w-4+3i|=|1+i-1+i| \Leftrightarrow |w-4+3i|=|2i| \Leftrightarrow |w-(4-3i)|=2$$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του w είναι ο κύκλος με κέντρο $K(4,-3)$ και ακτίνα ρ=2.

Β4.

Αφού $(OK)=\sqrt{x_K^2+y_K^2}=\sqrt{4^2+(-3)^2}=\sqrt{25}=5$ τότε η εικόνες των μιγαδικών w που βρίσκονται πάνω στον κύκλο (Κ,ρ) θα έχουν μέγιστο μέτρο $|w|_{\max}=(\mathrm{OK})+\rho=5+2=7$ και ελάχιστο μέτρο $|w|_{\min}=(\mathrm{OK})-\rho=5-2=3$, δηλαδή

$$|w|_{\min}\le|w|\le|w|_{\max} \Leftrightarrow 3\le|w|\le 7$$

ΘΕΜΑ Γ.

Γ1.

$$f'_{(x)}=\left(2x+\ln\left(x^2+1\right)\right)'=2+\frac{2x}{x^2+1}=\frac{2x^2+2x+2}{x^2+1}=\frac{2\left(x^2+x+1\right)}{x^2+1}>0$$

Γ2.

$$2\left(x^2-3x+2\right)=\ln\left(\frac{(3x-2)^2+1}{x^4+1}\right)\Leftrightarrow 2x^2-2(3x-2)=\ln\left((3x-2)^2+1\right)-\ln\left(x^4+1\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(x^4+1\right)+2x^2=\ln\left((3x-2)^2+1\right)+2(3x-2)\Leftrightarrow f_{\left(x^2\right)}=f_{(3x-2)}\underset{f\,1-1}{\overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow}}x^2=3x-2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2-3x+2=0\Leftrightarrow (x-1)(x-2)=0\Leftrightarrow x=1 \text{ ή } x=2$$

Γ3.

$$f''_{(x)}=\left(2+\frac{2x}{x^2+1}\right)'=\frac{2\left(x^2+1\right)-4x^2}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{-2x^2+2}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{-2\left(x^2-1\right)}{\left(x^2+1\right)^2}$$

$$f''_{(x)}=0\Leftrightarrow x=1 \text{ ή } x=-1$$

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
f''	-	o	+	o	-
f					
		Σ.Κ.		Σ.Κ.	

Άρα η f έχει δύο σημεία καμπής τα $A(-1,-2+\ln 2)$ και $B(1,2+\ln 2)$

Αφού $f'_{(-1)}=1$ και $f'_{(1)}=3$ οι εφαπτομένες στα $A(-1,-2+\ln 2)$ και $B(1,2+\ln 2)$ είναι :

$\varepsilon_1 : y+2-\ln 2=x+1\Leftrightarrow y=x-1+\ln 2$ και $\varepsilon_2 : y-2-\ln 2=3(x-1)\Leftrightarrow y=3x-1+\ln 2$

Άρα τα κοινά τους σημεία δίνονται από τη λύση του συστήματος:

$$\begin{cases} y=x-1+\ln 2 \\ y=3x-1+\ln 2 \end{cases}$$

$$0=2x\Leftrightarrow x=0 \text{ άρα}$$

$$y=\ln 2-1$$

Το κοινό τους σημείο είναι το $K(0,\ln 2-1)$

Γ4.

$$I=\int_{-1}^{1}xf_{(x)}dx=\int_{-1}^{1}\left(2x^2+x\ln\left(x^2+1\right)\right)dx=\left[\frac{2x^3}{3}\right]_{-1}^{1}+\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\left(x^2\right)'\ln\left(x^2+1\right)dx=$$

$$=\frac{2}{3}+\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\left[x^2\ln\left(x^2+1\right)\right]_{-1}^{1}-\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}x^2\frac{2x}{x^2+1}dx=\frac{4}{3}+\frac{1}{2}(\ln 2-\ln 2)-\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{2x^3}{x^2+1}dx=$$

$$=\frac{4}{3}-\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\left(2x-\frac{2x}{x^2+1}\right)dx=\frac{4}{3}-\frac{1}{2}\left[x^2-\ln\left(x^2+1\right)\right]_{-1}^{1}=\frac{4}{3}-\frac{1}{2}(1-\ln 2-1+\ln 2)=\frac{4}{3}$$

ΘΕΜΑ Δ.

Δ1.

$f_{(x)} - x = 3 + \int_0^x \frac{t}{f_{(t)} - t} dt \Leftrightarrow f_{(x)} = x + 3 + \int_0^x \frac{t}{f_{(t)} - t} dt$ η f είναι παραγωγίσιμη ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων άρα :

$$f'_{(x)} = 1 + \frac{x}{f_{(x)} - x} = \frac{f_{(x)} - x + x}{f_{(x)} - x} = \frac{f_{(x)}}{f_{(x)} - x}$$

Δ2.

$$g'_{(x)} = \left(f^2_{(x)} - 2xf_{(x)}\right)' = 2f_{(x)} \cdot f'_{(x)} - 2f_{(x)} - 2x \cdot f'_{(x)} = \left(2f_{(x)} - 2x\right) f'_{(x)} - 2f_{(x)} =$$

$$= 2\left(f_{(x)} - x\right) \frac{f_{(x)}}{f_{(x)} - x} - 2f_{(x)} = 0$$

Άρα $g_{(x)} = c$

Δ3.

$g_{(x)} = c \Leftrightarrow f^2_{(x)} - 2xf_{(x)} = c$ αλλά για $x = o$ η σχέση $f_{(x)} = x + 3 + \int_0^x \frac{t}{f_{(t)} - t} dt$ δίνει $f_{(0)} = 3$

οπότε $f^2_{(0)} - 2 \cdot 0 \cdot f_{(0)} = c \Leftrightarrow c = 9$

Άρα

$$f^2_{(x)} - 2xf_{(x)} = 9 \Leftrightarrow f^2_{(x)} - 2xf_{(x)} + x^2 = x^2 + 9 \Leftrightarrow \left(f_{(x)} - x\right)^2 = x^2 + 9 \Leftrightarrow f_{(x)} - x = \pm\sqrt{x^2 + 9} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f_{(x)} = x \pm \sqrt{x^2 + 9}$$

Για $x = 0$ το $\mathrm{f}_{(0)} = 0 + \sqrt{x^2 + 9} = 3$ ισχύει

Και για $x = 0$ το $\mathrm{f}_{(0)} = 0 - \sqrt{x^2 + 9} = -3$ απορρίπτεται

Δ4.

Έστω η συνάρτηση $h_{(t)} = \int_0^t f_{(u)} du$ με $h'_{(t)} = f_{(t)}$

Για την $h_{(t)}$ ισχύει

- Συνεχής στο $[x, x+1]$ και στο $[x+1, x+2]$
- Παραγωγίσιμη στο $(x, x+1)$ και στο $(x+1, x+2)$

Άρα από Θεώρημα Μέσης Τιμής διαφορικού λογισμού υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi_1 \in (x, x+1)$ και $\xi_2 \in (x+1, x+2)$ τέτοια ώστε :

$$h'_{(\xi_1)} = \frac{h_{(x+1)} - h_{(x)}}{x + 1 - x} = \frac{\int_0^{x+1} f_{(u)} du - \int_0^x f_{(u)} du}{1} = \int_x^{x+1} f_{(u)} du$$

$$h'_{(\xi_2)} = \frac{h_{(x+2)} - h_{(x+1)}}{x+2-x-1} = \frac{\int_0^{x+2} f_{(u)}du - \int_0^{x+1} f_{(u)}du}{1} = \int_{x+1}^{x+2} f_{(u)}du$$

Και αφού $\xi_1 < \xi_2$ τότε $h_{(\xi_1)} < h_{(\xi_1)}$