Απαντήσεις θεμάτων γενικής 2010-05-17

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό σελ. 93
Α2. Σχολικό σελ. 87
Α3. σχολικό σελ. 140
Α4.

α) Σ
β) Λ
γ) Σ
δ) Λ
ε) Λ

ΘΕΜΑ Β

Β1.

$$\lim_{x\to 1}\frac{f_{(x)}-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{2\sqrt{x^2-x+1}-2}{x-1}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 1}\frac{2\left(\sqrt{x^2-x+1}-1\right)\cdot\left(\sqrt{x^2-x+1}+1\right)}{(x-1)\cdot\left(\sqrt{x^2-x+1}+1\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{2\left[\left(\sqrt{x^2-x+1}\right)^2-1\right]}{(x-1)\cdot\left(\sqrt{x^2-x+1}+1\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{2\left(x^2-x+1-1\right)}{(x-1)\cdot\left(\sqrt{x^2-x+1}+1\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{2\left(x^2-x\right)}{(x-1)\cdot\left(\sqrt{x^2-x+1}+1\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{2x(x-1)}{(x-1)\cdot\left(\sqrt{x^2-x+1}+1\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{2x}{\left(\sqrt{x^2-x+1}+1\right)}=\frac{2}{2}=1$$

Β2.
Η πρώτη παράγωγος της $f_{(x)}$ είναι

$$f'_{(x)}=\left(2\sqrt{x^2-x+1}-1\right)'=2\frac{1}{2\sqrt{x^2-x+1}}\left(x^2-x+1\right)'=\frac{2x-1}{\sqrt{x^2-x+1}}$$

Άρα $f'_{(0)}=\dfrac{-1}{1}=-1$

Β3.Αν ω η γωνία που σχηματίζει η εφαπτόμενη ευθεία με τον άξονα x΄x θα ισχύει :

$$\varepsilon\varphi\omega=-1\Leftrightarrow\varepsilon\varphi\omega=\varepsilon\varphi\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)\overset{0\le\omega<\pi}{\Leftrightarrow}\omega=\frac{3\pi}{4}$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Το άνω άκρο της πρώτης κλάσης είναι $0+c=c$ άρα τα άκρα της δεύτερης κλάσης είναι $[c,2c)$ με κέντρο $x_2=\dfrac{2c+c}{2}\Leftrightarrow 6=\dfrac{3c}{2}\Leftrightarrow 3c=12\Leftrightarrow c=4$

Γ2.

$[a,\beta)$	x_i	v_i	$x_i\cdot v_i$	x_i^2	$x_i^2\cdot v_i$
$[0,4)$	2	20	40	4	80
$[4,8)$	6	40	240	36	1440
$[8,12)$	10	45	450	100	4500
$[12,16)$	14	30	420	196	5880
$[16,20)$	18	25	450	324	8100
	Σύνολο	160	1600		20000

Τότε $\bar{x}=\dfrac{\sum_{i=1}^{\kappa}x_i\cdot v_i}{v}=\dfrac{1600}{160}=10$ και

$$s^2=\frac{1}{v}\left[\sum_{i=1}^{\kappa}x_i^2\cdot v_i-\frac{\left(\sum_{i=1}^{\kappa}x_i\cdot v_i\right)^2}{v}\right]=\frac{1}{160}\cdot\left[20000-\frac{(1600)^2}{160}\right]=\frac{1}{160}\cdot\left[20000-\frac{2560000}{160}\right]=$$

$$=\frac{1}{160}\cdot\left[20000-16000\right]=\frac{400}{160}=25$$

Άρα $s=\sqrt{s^2}=\sqrt{25}=5$

Γ3.

Αφού $CV=\dfrac{s}{\bar{x}}=\dfrac{5}{10}=50\%>10\%$ το δείγμα χαρακτηρίζεται ανομοιογενές.

Γ4.

Αν θεωρήσουμε τις παρατηρήσεις της κλάσης [4,8) ομοιόμορφα κατανεμημένες τότε στο διάστημα [7,8) θα βρίσκεται το $\dfrac{1}{4}$ των παρατηρήσεων δηλαδή $\dfrac{v_2}{4}=\dfrac{40}{4}=10$.

Όμοια, αφού το 14 είναι το κέντρο του διαστήματος [12,16) τότε στο [12,14) θα βρίσκονται οι μισές παρατηρήσεις, δηλαδή $\dfrac{v_4}{2}=\dfrac{30}{2}=15$.

Άρα από 7 μέχρι 14 κιλά είναι :

$\dfrac{v_2}{3}+v_3+\dfrac{v_4}{2}=10+45+15=70$ παρατηρήσεις επομένως $P(A)=\dfrac{N(A)}{N(\Omega)}=\dfrac{70}{160}$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

$$f'_{(x)}=\left(\ln\left(x-P(A)\right)-\frac{1}{2}\left(x-P(A)\right)^2+P(B)\right)'=\frac{1}{x-P(A)}-\left(x-P(A)\right)=\frac{1-\left(x-P(A)\right)^2}{x-P(A)}=$$

$$=\frac{\left(1-x+P(A)\right)\left(1+x-P(A)\right)}{x-P(A)}$$

Άρα $f'_{(x)}=0 \Leftrightarrow x=1+P(A)$ ή $x=1-P(A)<0$ απορρίπτεται

και

$f'_{(x)}>0 \Leftrightarrow x<1+P(A)$

Η f παρουσιάζει μέγιστο για $x=1+P(A)$

x	$P(A)$		$1+P(A)$		$+\infty$
$f'_{(x)}$	‖	+	0	-	
$f_{(x)}$	‖	↗	max	↘	

το

$$f_{\left(1+P(A)\right)}=\ln 1-\frac{1}{2}\left(1+P(A)-P(A)\right)^2+P(B)$$

$$=-\frac{1}{2}+P(B)$$

Δ2.

Για $x_o=\frac{5}{3}$ παρουσιάζει ακρότατο επομένως $1+P(A)=\frac{5}{3}\Leftrightarrow P(A)=\frac{2}{3}$

Ακόμα $f_{(x_o)}=0$ άρα $f_{\left(\frac{5}{3}\right)}=0\Leftrightarrow P(B)-\frac{1}{2}=0\Leftrightarrow P(B)=\frac{1}{2}$

Δ3.

$$P(A\cup B)=\frac{5}{6}\Leftrightarrow P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{5}{6}\Leftrightarrow\frac{2}{3}+\frac{1}{2}-P(A\cap B)=\frac{5}{6}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(A\cap B)=\frac{2}{3}+\frac{1}{2}-\frac{5}{6}\Leftrightarrow P(A\cap B)=\frac{1}{3}$$

Το ενδεχόμενο να μην πραγματοποιηθούν ταυτόχρονα τα Α και Β είναι το $(A\cap B)'$ άρα

$$P\left((A\cap B)'\right)=1-P(A\cap B)=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

Δ4.

Το ενδεχόμενο να πραγματοποιηθεί μόνο ένα από τα Α και Β είναι το $(A-B)\cup(B-A)$ άρα

$$P\left((A-B)\cup(B-A)\right)=P(A-B)+P(B-A)=P(A)-P(A\cap B)+P(B)-P(A\cap B)=$$

$$=P(A)-2P(A\cap B)+P(B)=\frac{2}{3}-2\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

(τα ενδεχόμενα $(A-B)$ και $(B-A)$ είναι ασυμβίβαστα)

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ ΑΠΑΝΤΗΣΕΩΝ
ΜΑΡΚΟΣ Κ. ΠΑΝΑΓΙΩΤΗΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ