ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΛΥΣΕΙΣ-ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Σχολικό

Β. Σχολικό

Γ.

α. Λ

β. Σ

γ. Λ

δ. Σ

ε. Σ

ΘΕΜΑ 2ο

α. Αφού

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{\nu} x_i \cdot \nu_i}{\nu} \Leftrightarrow$$

$$4 = \frac{2 \cdot 6 + 3 \cdot \nu_2 + 5 \cdot 3 + 8 \cdot 4}{6 + \nu_2 + 3 + 4} \Leftrightarrow \dots$$

$$\Leftrightarrow \nu_2 = 7$$

x_i	ν_i	$x_i - \overline{x}$	$\left(x_i - \overline{x}\right)^2$	$\left(x_i - \overline{x}\right)^2 \cdot \nu_i$
2	6	-2	4	24
3	7	-1	1	7
5	3	1	1	3
8	4	4	16	64
Σύνολο	20			98

β. $s^2 = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu}\left(x_i - \overline{x}\right)^2 \cdot \nu_i = \frac{1}{20} \cdot 98 = 4,9$

γ. Η τυπική απόκλιση $s = \sqrt{s^2} = \sqrt{4.9} \simeq 2,2$ οπότε

$CV = \frac{s}{\overline{x}} = \frac{2,2}{4} = 0,55 > 10\%$ και άρα το δείγμα είναι ανομοιογενές.

ΘΕΜΑ 3ο

α. Αφού $f_{(x)} = x^3 - 6x^2 + ax - 7$ άρα $f'_{(x)} = 3x^2 - 12x + a$ και $f''_{(x)} = 6x - 12$

Άρα $2f''_{(x)} + f'_{(x)} + 15 = 3x^2 \Leftrightarrow 2\left(6x - 12\right) + 3x^2 - 12x + a + 15 = 3x^2 \Leftrightarrow$

$12x - 24 + 3x^2 - 12x + a + 15 = 3x^2 \Leftrightarrow a = 9$

β. Για α=9 το $f_{(x)} = x^3 - 6x^2 + 9x - 7$.και το $f'_{(x)} = 3x^2 - 12x + 9$

Το τριώνυμο $3x^2 - 12x + 9$ παραγοντοποιείται ως εξής:

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-12)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 9 = 144 - 108 = 36 > 0$ με

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{12 \pm \sqrt{36}}{2 \cdot 3} = \left\langle \begin{array}{l} \dfrac{12+\sqrt{36}}{6} = 3 \\ \dfrac{12-\sqrt{36}}{6} = 1 \end{array} \right., \text{ άρα } 3x^2 - 12x + 9 = 3(x-1)(x-3)$$

Οπότε και το όριο γράφεται:

$$\lim_{x \to 1} \frac{f'_{(x)}}{x^2 - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{3x^2 - 12x + 9}{x^2 - 1} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \to 1} \frac{3(x-1)(x-3)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \to 1} \frac{3(x-3)}{(x+1)} =$$

$$= \frac{3(1-3)}{1+1} = -3$$

γ. Η εφαπτομένη της $f_{(x)}$ για να είναι παράλληλη στην ευθεία $y = -3x$ θα πρέπει να υπάρχει ένα σημείο $\left(x, f_{(x)}\right)$ της γραφικής παράστασης της $f_{(x)}$ για το οποίο να ισχύει : $f'_{(x)} = -3 \Leftrightarrow 3x^2 - 12x + 9 = -3 \Leftrightarrow 3x^2 - 12x + 12 = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 3\left(x^2 - 4x + 4\right) = 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

Με $f_{(2)} = 2^3 - 6 \cdot 2^2 + 9 \cdot 2 - 7 = 8 - 24 + 18 - 7 = -5$.

Αν $\varepsilon : y = \lambda x + \kappa$ η εξίσωση της εφαπτομένης της $f_{(x)}$ στο $\left(2, f_{(2)}\right)$ τότε $\lambda = f'_{(2)} = -3$ και $f_{(2)} = -3 \cdot 2 + \kappa \Leftrightarrow \kappa = 1$, οπότε $\varepsilon : y = -3x + 1$.

ΘΕΜΑ 4ο

Α.

α. $f'_{(x)} = \left(\ln x - \dfrac{x}{2} + \lambda^2 - 6\lambda + 2\right)' = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{2}$

x	0		2		$+\infty$
f'		+	0	-	
f		↗		↘	

$$f'_{(x)} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x} - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow 2 - x = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

Και $f'_{(x)} > 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{2} > 0 \underset{\substack{\pi o\lambda/\mu\varepsilon \\ \mu\varepsilon\ \ 2x>0}}{\overset{x>0}{\Leftrightarrow}} 2 - x > 0 \Leftrightarrow x < 2$

Άρα η συνάρτηση $f_{(x)}$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,2]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[2,+\infty)$.

β. Παρουσιάζει μέγιστο για $x = 2$ το $f_{(2)} = \ln 2 - 1 + \lambda^2 - 6\lambda + 2$

Β.

α. Αφού $2 < 3 < 4 < 5 < 8$ και η $f_{(x)}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $[2,+\infty)$ άρα $f_{(8)} < f_{(5)} < f_{(4)} < f_{(3)} < f_{(2)}$. Οι πέντε αυτές παρατηρήσεις έχουν εύρος :

$$R = x_{max} - x_{\min} = f_{(2)} - f_{(8)} = \ln 2 - \frac{2}{2} - \left(\ln 8 - \frac{8}{2}\right) = \ln 2 - 1 - \ln 8 + 4 = \ln\frac{2}{8} + 3 = \ln\frac{1}{4} + 3$$

και διάμεσο $\delta = x_3 = f_{(4)} = \ln 4 + \lambda^2 - 6\lambda$.

β. Το άθροισμα R+δ είναι ίσο με:

$R + \delta = \ln\dfrac{1}{4} + 3 + l\,n 4 + \lambda^2 - 6\lambda = \ln 1 - \ln 4 + \ln 4 + \lambda^2 - 6\lambda + 3 = \lambda^2 - 6\lambda + 3$ με

$R + \delta < -2 \Leftrightarrow \lambda^2 - 6\lambda + 3 < -2 \Leftrightarrow \lambda^2 - 6\lambda + 5 < 0$, $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 36 - 20 = 16$

και $\lambda_{1,2} = \dfrac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \dfrac{6 \pm \sqrt{16}}{2} = \left\langle \begin{array}{l} \dfrac{6+4}{2} = 5 \\[2mm] \dfrac{6-4}{2} = 1 \end{array} \right.$ άρα $(\lambda - 5)(\lambda - 1) < 0$ οπότε

$A = \{2,3,4\}$ και $P_{(A)} = \dfrac{N_{(A)}}{N_{(\Omega)}} = \dfrac{3}{100}$

	$-\infty$	1		5		$+\infty$
$\lambda^2 - 6\lambda + 5$	+	0	-	0	+	

Επιμέλεια απαντήσεων

Μάρκος Κ. Παναγιώτης

Μαθηματικός